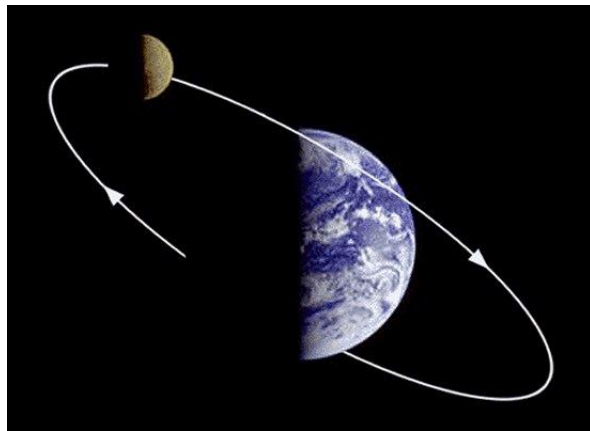


A. 重力的理論

從我們的日常生活以至整個宇宙的運行，重力都有著重要的角色。因為重力的作用，水會往低處流，物體會往下掉，我們也能夠生活在地球上；地球圍繞太陽公轉，宇宙中的氣團聚集成包括太陽在內的一顆顆恆星，古老恆星在燃燒殆盡後塌縮死亡……這些現象都與重力息息相關。既然重力如此重要，我們對它有足夠的認識嗎？為了明白重力，我們需要一套準確的重力理論，在科學家多個世紀的努力下，人類總算對重力有一定程度的了解，並能夠利用重力理論解釋部份天體現象。



重力理論的革新

牛頓於十七世紀提出萬有引力理論長時間以來都有效地解釋了大部份觀測到的天體現象，直至後來科學家陸續發現一些它不能準確描述的現象，以及與其他物理理論不相符的地方，而被更精確描述重力的廣義相對論取代¹。

愛因斯坦的廣義相對論描述物質如何產生重力，以及在重力下物質如何運動。不同於牛頓的萬有引力理論，廣義相對論以時空的幾何表達，用「時空的彎曲」取代了「萬有引力」，這種新的表達形式有廣義不變性 (**general covariance**)，在不同的座標下保持不變²。這裡要注意的是：時空彎曲的表達形式並不是廣義相對論獨有的，實際上，它可應用於不同的重力理論，包括牛頓力學的萬有引力理論，只是原本的牛頓重力理論沒有選取這種形式表達而已。

¹ 即便如此，牛頓的重力理論作為估算仍然十分有效，且時至今日仍被廣泛應用。

² 時空幾何的表達方式摒棄了牛頓力學原先假設的廣域慣性座標系統 (**global inertial reference frame**)，再也沒有首選的座標系統，它在不同的座標系統都維持一樣。舉一反例，牛頓第二定律沒有廣義不變性， $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 只適用於慣性座標，在不同的非慣性座標系統下則有不同寫法。事實上任何物理理論也可表達成擁有廣義不變性的形式，比如牛頓力學也可用等價的拉格朗日力學 (**Lagrangian mechanics**) 表達

以下我們先從熟悉的牛頓萬有引力理論引入時空的幾何，再介紹廣義相對論。

等效原理

首先，我們介紹對於以時空幾何表達的重力理論至關重要的等效原理 (Equivalence principle)。

等效原理表示：觀測者不能在局部的範圍內分辨出由加速度所產生的慣性力和均勻重力。這原理的關鍵在慣性質量(m_i)等於重力質量(m_g)，在幾個世紀以前已被發現。

牛頓第二定律表明在慣性系統中：

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a} ,$$

即力(\mathbf{F})等於慣性質量乘以加速度(\mathbf{a})。對於重力場下自由落體的物件，牛頓的萬有引力理論表明：

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g} ,$$

重力等於重力質量乘以重力加速度(\mathbf{g})，因此自由落體時：

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i} \mathbf{g} .$$

這裡我們區分了慣性質量(m_i)及重力質量(m_g)，慣性質量是物體抵抗運動變化的程度，來自於牛頓第二定律；而重力質量則正比於物體重力的強度，來自牛頓的萬有引力理論。

早在 17 世紀初，伽利略已用實驗證明了不同質量的物體於自由落體時的加速度是一致的，即 $\frac{m_g}{m_i}$ 是一個常數，一般會選作 $\frac{m_g}{m_i} = 1$ ，即慣性質量等於重力質量，因此一般我們用質量(m) 同時代表慣性質量及重力質量。自伽利略以後，多個物理學家反覆用實驗以更高的精確度驗證，至今仍然是同一結論。

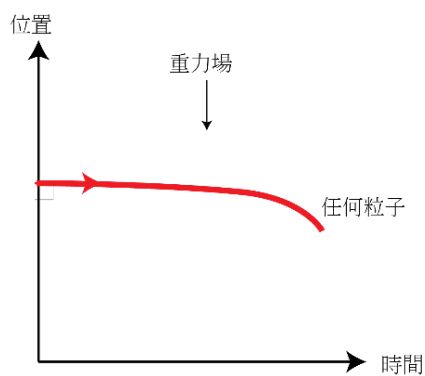
這看起來是一個偶然的結果，可是當愛因斯坦著手研究重力理論時，卻注意到 $m_g = m_i$ 意味著一個重要引伸：任何局部範圍的實驗都無法分辨重力及加速系統對物體運動的影響。這稱作等效原理，它使得重力不同於其他力。以電磁力作例子，在 \mathbf{E} 電場下擁有電荷 q 及慣性質量 m_i 的粒子所受的力為：

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} ,$$

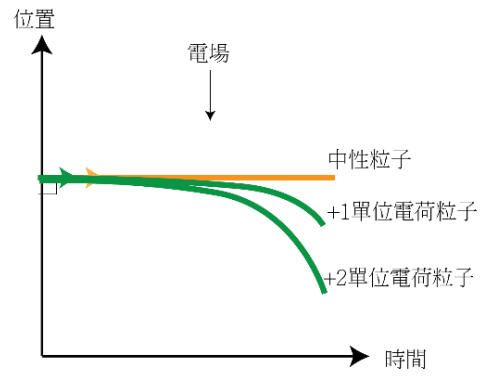
$$\mathbf{a} = \frac{q}{m_i} \mathbf{E} .$$

粒子的加速度取決於粒子的性質 ($\frac{q}{m_i}$) (圖一 B)，但重力造成的加速度則單單取決於 \mathbf{g} ，在同一重力場並且沒有其他外力的情況下，只要起始位置及速度一樣，

不同性質的物體的運動路徑就是一致的(圖一 A)，不論是沒有質量的光，還是質量龐大的粒子，因此重力跟其他力不同。



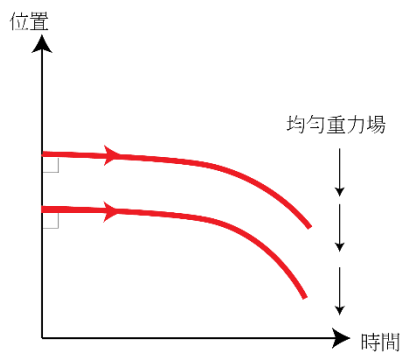
圖一A：時空圖上粒子受重力影響的路徑



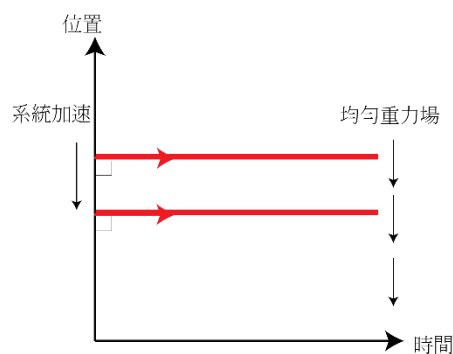
圖一B：時空圖上不同粒子受電磁力影響的路徑 (質量相同的粒子)

無論在牛頓力學或廣義相對論下，我們都可在細小範圍內用加速系統的慣性力取代重力，這為之後以時空的幾何表達重力理論奠定基礎。

以兩粒起始速度為零的粒子作例子，圖二 A 展示出它們在均勻重力場下在時空圖表的路徑，圖二 B 中加速系統的慣性力抵消了重力場，粒子的路徑變成了平衡的直線，這說明了均勻的重力等同座標系統的慣性力。注意不論在哪個座標系統，兩粒粒子路徑之間的距離都一直維持不變，這說明時空是平直的。(與下一節所講的時空彎曲作對比。)



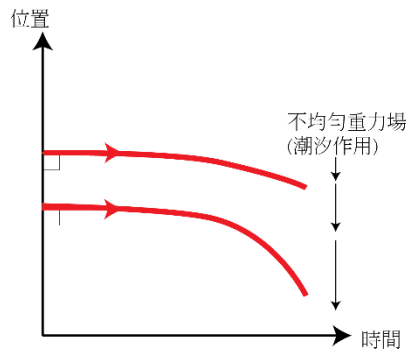
圖二A：受均勻重力場影響的路徑



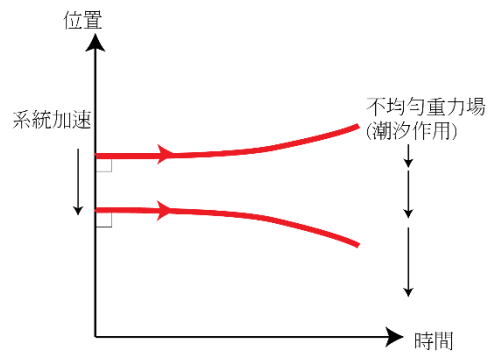
圖二B：均勻重力場可被加速系統的慣性力抵消

潮汐作用及時空的彎曲

等效原理表明局部範圍內重力的效果相等於加速系統的慣性力，但重力是不均勻的，在牛頓的萬有引力理論下重力加速度是 $\mathbf{g} = \frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ ，在不同位置上 \mathbf{g} 的數值都不一樣，因此在不同位置的重力不可以用單一的加速系統取代，如此一來，是否違反了等效原理呢？

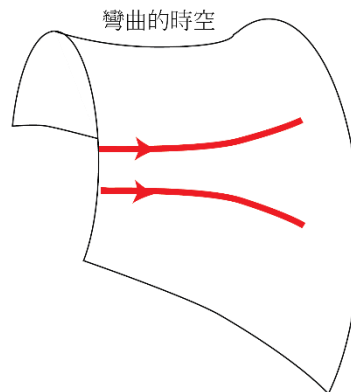


圖三A：受不均勻重力場影響的路徑



圖三B：受不均勻重力場影響的路徑不能被加速系統的慣性力抵消

並沒有。等效原理只應用於局部範圍內，重力不均勻所造成的效果則是廣域範圍的，兩者沒有矛盾。重力不均勻引致潮汐效應(tidal effect)³--不同位置的物件之間存在相對加速，不能以單一加速系統取代(圖三)。儘管如此，重力的影響仍然與粒子的性質無關，是時空自身的性質，如果時空是彎曲的，就能夠涵蓋這種潮汐效應，這樣一來，重力成為了時空的幾何問題。



圖四：彎曲的時空上的「直線」

在這個表達方式下，重力加速可於局部範圍內⁴用加速系統的慣性加速度取締，而潮汐效應則是時空彎曲所造成的，是廣域範圍的影響，它可導致不同位置上的平衡直線之間的距離產生變化(圖四)，因此任何自由落體的物件都沒有受重力吸引，而是在彎曲的時空上以直線⁵行走。注意這裡的曲率在不同座標系統裡都是不變的，是時空固有的特性。

簡單來說，時空幾何的表達方式把原本的萬有引力闡述為 **(1) 座標系統的慣性**

³ 作用在物體上的不均勻重力，會使物體彷彿受到拉扯，從而兩端伸長，其餘方向則向內收縮，這現象稱作潮汐效應。地球上的潮汐漲退，也是源於月球(及太陽)對地球表面的不均勻重力

⁴ 只要考慮的空間範圍足夠小，任何重力場都近乎均勻，例如接近地球表面我們會把重力加速度 g 當成常數，以簡化計算

⁵ 曲面上的直線即是兩點之間距離最短的路線，稱作「測地線」(geodesics)

加速，加上 (2) 時空彎曲造成的效果。座標系統的轉換可取代局部範圍內的重力或均勻的重力場，而時空的彎曲則應對了廣域範圍裡不均勻重力場的潮汐效應，如此一來，重力真實的影響被時空的彎曲所取代。

牛頓-嘉當理論

基於上述的等效原理，時空彎曲的概念可應用於不同的重力理論，包括牛頓力學的萬有引力理論。儘管原本牛頓的理論並沒有把重力看成是時空的幾何問題，法國數學家埃里·嘉當(Élie Cartan)於 1923 年發佈以時空彎曲的形式⁶重新表達牛頓的萬有引力理論，重新編寫的理論被稱為「牛頓-嘉當理論」(Newton-Cartan Theory)，它清楚展示出牛頓的萬有引力也可以被時空彎曲取代，可見它與廣義相對論的相似之處，前者屬於後者的低速、弱力場情況，因此牛頓的理論與廣義相對論核心的不同之處並不在於「重力」或「時空的彎曲」這些形式上的表示方法，而是在於兩者關聯時空曲率與物質質量(或能量)的關係式之不同。

牛頓的重力理論既可以用「萬有引力」表達，也可用彎曲的時空表達。同樣，廣義相對論除了以時空的幾何表達，也可由平直時空⁷作出發點並引入「重力場」⁸，最終推導出一致的理論，但這個方法絕不簡單直接。因此時空幾何是廣義相對論的自然表達方法。

牛頓萬有引力的不足、廣義相對論

1905 年，愛因斯坦發表狹義相對論，準確描述了沒有重力下物體的運動^{9 10}，當需要進一步考慮重力時，最直接的方法是希望將已有的重力理論整合在狹義相對論中。但當時的重力理論--牛頓的萬有引力理論--與狹義相對論矛盾，其中一個主要的問題在於牛頓理論中的重力不需要任何時間就能傳遞，這違反了狹義相對論所講，沒有資訊能夠超越光速。這驅使愛因斯坦著手研究一個更完善的重力理論--廣義相對論。

⁶ 牛頓理論下時間及空間都是絕對的，而且它們互不相關，在這個框架下，牛頓-嘉當理論把時間及空間強行看作一個整體--時空，這會導致時空被「分層」(stratified)，由一層層的三維歐幾里德空間(Euclidean space)組成，每層都是某一時間下空間的形態，像幻燈片一樣。廣義相對論及狹義相對論裡的時間及空間則是一個四維連續體，不存在分層的現象

⁷ 這裡的平直時空指狹義相對論所採用的閔考斯基時空(Minkowski spacetime)，不同於牛頓理論裡的平直時空--獨立的絕對時間及絕對空間，閔考斯基時空裡時間及空間是一個整體

⁸ 與牛頓理論裡帕松方程(Poisson equation)的標量場(scalar field)不同，廣義相對論的重力場是二級張量場(second-rank tensor field)

⁹ 即使在忽略重力的情況下，牛頓理論也不能準確描述接近光速的運動，在計算這些運動時我們需要用到狹義相對論

¹⁰ 一些常見的謬誤認為狹義相對論不能處理加速運動或加速系統，其實不然，狹義相對論足以應付這些問題，但需要把原本在慣性系統中的運動方程加以拓展

廣義相對論下，重力真實的影響是時空彎曲帶來的潮汐效應，這曲率取決於物質質量(或能量)的分佈情況，由著名的「愛因斯坦方程」主導：

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} ,$$

這裡的 κ 是一個常數， $G_{\mu\nu}$ 是愛因斯坦張量，與時空的曲率相關； $T_{\mu\nu}$ 則是能量-動量張量，描述物質質量與能量的分佈。引用著名物理學家約翰·惠勒(John Wheeler)的文字概括：「物質告訴時空如何彎曲，時空告訴物質怎樣運動」。廣義相對論與至今多個觀測結果吻合，並通過了多項測試，是現代物理中最準確的重力理論。

